Prof. Dr. Alfred Toth

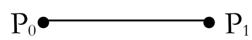
Homologe Semiotik

1. Mathematische Simplexe

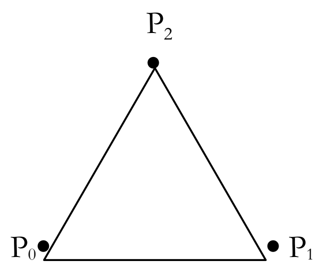
Polyeder sind als spezielle Unterräume des ($\mathbf{R}^n$; $\underline{\mathbf{R}}^n$) von Bedeutung, weil sich eine Reihe von topologischen Problemen im $\mathbf{R}^n$, im allgemeinen unter Anwendung der Homöomorphie, auf Polyeder eingrenzen läßt. Da man sich kombinatorischer Hilfsmittel bedient, gehört dieser Teilbereich der algebraischen Topologie zur kombinatorischen Topologie. Man kann sich Polyeder aus einer endlichen Anzahl von "Ecken", "Kanten", "Dreiecksflächen" und "Tetraedern" usw. aufgebaut denken und allenfalls noch weitere Kanten einfügen. Diese Bausteine der Polyeder heißen **Simplexe**, wobei man je nach ihrer Dimension zwischen 0-, 1-, 2- und 3-dimensionalen Simplexen unterscheidet (Reinhardt und Soeder 1994, S. 240 f.):

0-dimensionales Simplex: •P

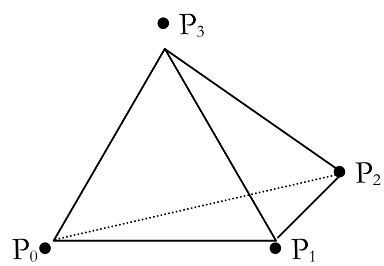
1-dimensionales Simplex:



2-dimensionales Simplex:



3-dimensionales Simplex:



Mit Polyedern, deren Triangulationen aus 0- und 1-dimensionalen Simplexen bestehen, beschäftigt sich die Graphentheorie. Da die Graphentheorie sich heute zu einer weitgehend verselbständigten Wissenschaft entwicklet hat und da es zudem reichliche Vorarbeiten zur semiotischen Graphentheorie gibt, wurde diese in einem separaten Kapitel behandelt.

2. Semiotische Simplexe

In dem Kapitel "Umrisse einer kombinatorischen Semiotik" hatte bereits Bense (1975, S. 76 f.) einen ersten (und den bisher einzigen) Vorschlag zu einer homologen Semiotik gemacht. Allerdings entspricht seine Darstellung nicht der gängigen mathematischen Praxis:

sS^1: 1-stelliges Simplex: monadische Relata M, O, I

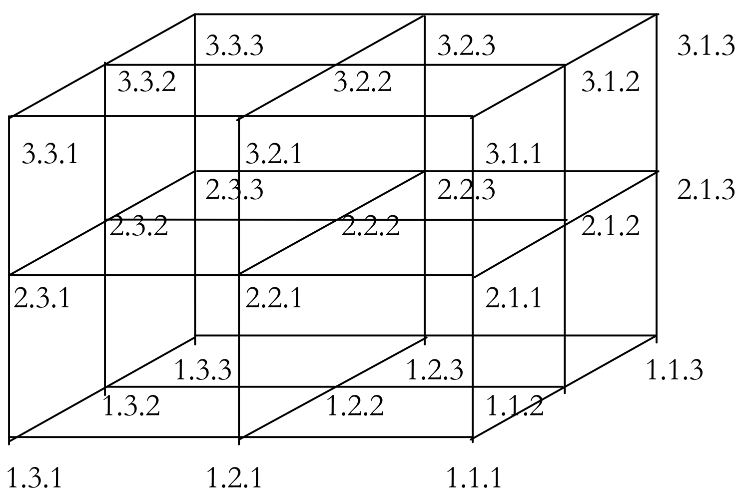
sS^2: 2-stelliges Simplex: dyadische Relationen M $\rightarrow$ 0 u.a.

sS²: 1-stelliges Simplex: triadische Relationen im Sinne eines vollständigen Zeichenrealisats

Demgegenüber schlage ich vor, semiotische Simplexe wie folgt einzuführen:

sS⁰: 0-stelliges Simplex: die Primzeichen (.1., .2., .3.)
sS¹: 1-stelliges Simplex: die Subzeichen der kleinen semiotischen Matrix (1.1, 1.2, 1.3; 2.1, 2.2, 2.3; 3.1 3.2, 3.3).
sS²: 2-stelliges Simplex: die 10 Zeichenklassen und Realitätsthematiken
sS³: 3-stelliges Simplex: jede räumliche Darstellung von Primzeichen, Subzeichen oder Zkln bzw. Rthn

Der m.W. erste Vorschlag für ein 3-stelliges semiotisches Simplex stammt von Stiebing (1978, S. 77); er spricht von den "Projektionen der Zeichenebene" und geht von triadischen Primzeichen aus:



Wir bekämen in diesem Fall Zkln der Form (3.a.b 2.c.d 1.e.f), wobei Stiebing nicht klar macht, ob solche Zkln durch die Relation ≤ halbgeordnet sind oder nicht.

Ein nächster Vorschlag, der von den 9 Subzeichen ausgeht, welche auf der Abszisse, Ordinate und Kote eines 3-dimensionalen Koordinatensystems aufgetragen werden, so daß sich triadische Subzeichen ergeben, welche ihrerseits aus den gewöhnlichen Primzeichen-Paaren zusammengesetzt sind (Beispiel: (1.1 1.1 1.1) stammt von Steffen (1982, S. 56) im Rahmen seiner Konstruktion des "Iterationsraums der Großen Matrix".

Ein weiterer Vorschlag für ein 3-stelliges semiotisches Simplex stammt von Arin (1981, S. 54 ff.), der einen "semiotischen bzw. Zeichenraum" konstruierte, aus dem nicht nur die Zkln und Rthn, sondern auch Paare von Zeichenrümpfen (Beispiel: 2.1 1.3 1.3 2.1) ablesbar sind. Ferner erwähnt Arin (1981, S. 37 m. Anm. 1) einen Vortrag Zellmers vom 7.6.1978 an der Universität Stuttgart: "Nach dieser Dastellung Siegfried Zellmers sind auf den 3 räumlichen Koordinatenachsen (x, y, z) alle 10 Zeichenklassen untergebracht, wodurch er versucht, den sogenannten 'Erkenntnisraum' zu bilden".

3. Simpliziale semiotische Komplexe und Gerüste

Bereits Bense hatte auf folgenden kombinatorisch-topologischen Sachverhalt hingewiesen: "Das Schema der Zerlegung eines (vollständigen oder partiellen) semiotischen Realisats in semiotische Simplexe bzw. in das System seiner semiotischen Simplexe heißt **semiotischer Komplex**. Ein simplizialer Komplex (sK) ist natürlich stets eine Menge von Simplexen. Unter dem **semiotischen Gerüst** kann die Menge seiner Relationen verstanden werden" (1975, S. 77). Für Simplexe gelten folgende Definitionen:

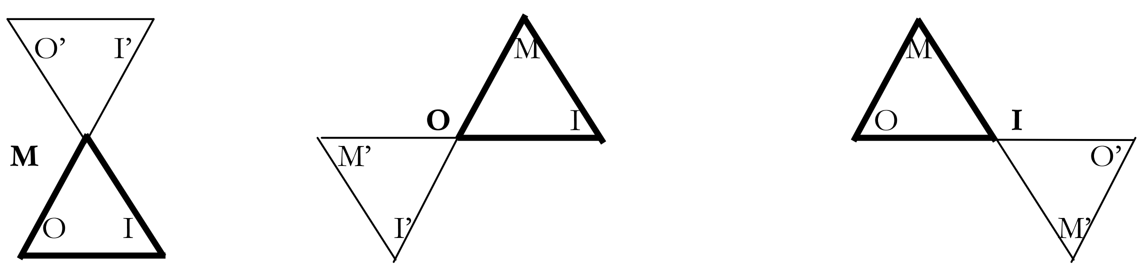
Definition 1: Eine endliche Simplexmenge K genügt den folgenden zwei Eigenschaften: 1. Der Durchschnitt je zweier Simplexe ist entweder leer oder ein Seitensimplex beider Simplexe; 2. Mit jedem Simplex ist auch jedes seiner Seitensimplexe aufgeführt.

Die in einem Simplizialkomplex erfaßte Punktmenge der Ebene oder des Raumes wird als Polyeder definiert.

Definition 2: Ist K ein Simplizialkomplex und |K| die Menge der Punkte aller Simplexe aus K, so heißt |K| Polyeder. K heißt auch Triangulation von |K|.

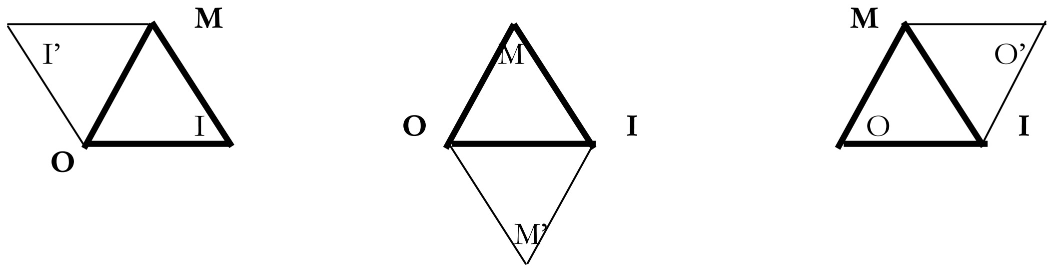
Bense (1975, S. 78 ff.) hat nun selbst Beispiele für semiotische Simplizialkomplexe bzw. semiotische Triangulationen gegeben, wobei er zwar nur zwischen drei monadischen und drei dyadischen Fällen unterschied, doch auf die Möglichkeiten "multipler Verknüpfung" immerhin hinwies.

Monadisch können Simplexe in M, O oder I zu Komplexen trianguliert werden; Bense spricht dabei von "Mittel-", "Objekt"- und "Interpretanten-Identität":



Hier liegt also der Fall vor, wo der Durchschnitt von je zwei Simplexen leer ist. Das semiotische Gerüst der monadischen Simplizialkomplexe ist stets |K| = 6, also als Polyeder ein Hexagon.

Dyadisch können Simplexe in (M → O), (O → I) und (I → M) zu Komplexen trianguliert werden (es handelt sich hier also, semiotisch gesprochen, um die Bezeichnungs-, Bedeutungs- und Gebrauchsfunktion des Zeichens):



Hier ist also der Durchschnitt von je zwei Simplexen ein Seitensimplex beider Simplexe. Das semiotische Gerüst der dyadischen Simplizialkomplexe ist stets |K| = 5, also als Polyeder ein Pentagon.

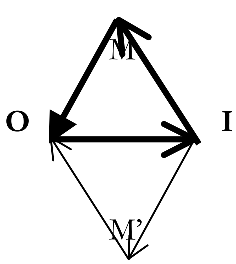
4. Semiotische Komplexe als Inzidenzmatrixen

Der **Nerv** $N(U_i)$ des Mengensystems $(U_i)_{i \in I}$ ist ein geometrischer simplizialer Komplex, der dem System $(U_i)_{i \in I}$ in folgender Weise zugeordnet ist:

1. Jeder der Mengen U_i sei eindeutig ein Punkt (0-Simplex) eines geeignet hochdimensionalen euklidischen Raumes zugeordnet; er wird mit dem entsprechenden Index I gekennzeichnet.

2. Die Punkte $i_0, i_1, \ldots, i_k$ spannen genau dann ein k-dimensionales Simplex $(i_0, i_1, \ldots, i_k) = s^k$ auf, wenn das System der zugehörigen Mengen U_i nicht-leeren Durchschnitt hat, wenn also $U_{i0} \cap U_{i1} \cap \ldots \cap U_{ik} \neq \varnothing$. Zwei Punkte i und j sind also dann durch eine Strecke verbunden, d.h. stellen ein 1-Simplex dar, wenn $V_i \cap V_j \neq \varnothing$ (Fischer 1973, S. 70).

Wie jeder endliche simpliziale Komplex, so kann auch der Nerv $N(U_i)$ einerseits durch das Schema des Komplexes (wie oben), anderseits durch die entsprechenden Inzidenzmatrizen I_k beschrieben werden. Nehmen wir als Beispiel die oben gezeigte dyadische Triangulierung der semiotischen Bedeutungsfunktion:



Im vorliegenden Fall haben wir:

0-Simplexe:	M, O, I (= 3)
1-Simplexe:	M → O, O → I, I → M, M' → O, M' → I (= 5)
2-Simplexe:	M → O → I, M' → O → I (= 3)

Die Inzidenzmatrizen I_k (k = 0, 1, …, n-1) fassen die Inzidenzzahlen ε_{ij}^k zusammen. Diese sind definiert als

$\varepsilon_{ij}^k = [s_i^{k+1}, s_j^k] = 1$ oder 0,

je nachdem, ob s_j^k als Seite in s_i^{k+1} auftritt oder nicht. Im Falle von orientierten Komplexen, und dies ist in der Semiotik bei den n-Simplexen mit n ≤ 1 der Fall, erhält man:

$\varepsilon_{ij}^k = [s_i^{k+1}, s_j^k] = +1, -1$ oder 0,

je nachdem, ob s_j^k in s_i^{k+1} als Seite gleichsinniger oder gegenseitiger Orientierung auftritt oder ob s_j^k in s_i^{k+1} nicht als Seite enthalten ist (Fischer 1973, S. 71).

Damit erhalten wir für den obigen dyadischen semiotischen Komplex die folgende Inzidenzmatrix:

	M	0	I	M'
M → 0	+1	+1	0	0
O → I	0	+1	+1	0
I → M	-1	0	-1	0
M' → O	0	+1	0	+1
M' → I	0	0	+1	+1

Aus den Inzidenzmatrizen können nun topologische Invarianten des Nervs $N(U_i)$, die sogenannten Zusammenhangszahlen bzw., da die semiotischen Simplexe und Komplexe orientiert sind, die sog. Betti-Zahlen und die Torsionszahlen berechnet werden (vgl. Seifert und Threlfall 1934, §§ 21 u. 87).

Die Betti-Zahlen b_k der Dimension k werden berechnet gemäß

$b_k = \alpha_k - r_k - r_{k-1}$,

wo α_k die Anzahl der k-dimensionalen Simplexe in $N(U_i)$ und r_k den Rang der k-ten Inzidenzmatrix I_k bezeichnet.

In unserem semiotischen Beispiel ist $N(U_i)$ ein 2-dimensionaler Komplex, $b_k = 1$, d.h. der semiotische Komplex besteht aus 1 Komponente, und die Torsionskoeffizienten der Dimension k werden als die invarianten Faktoren der Inzidenzmatrizen I_k gewonnen.

Literatur

Arin, Ertekin, Objekt- und Raumzeichen in der Architektur. Diss. ing. Stuttgart 1981
Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975
Fischer, Walther L., Äquivalenz- und Toleranzstrukturen in der Linguistik. München 1973

Reinhardt, Fritz und Soeder, Heinrich, dtv-Atlas zur Mathematik. Bd. 1. 10. Aufl. München 1994

Seifert, H[erbert] und Threlfall, W[illiam], Lehrbuch der Topologie. Berlin 1934, Nachdruck New York 1947

Steffen, Werner, Der Iterationsraum der Großen Matrix. In: Semiosis 25/26, 1982, S. 55-70

Stiebing, Hans Michael: Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorien auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. phil. Stuttgart 1978